

SPIS TREŚCI

PRZEDMOWA	13
CZĘŚĆ I. ALGEBRA ZBIORÓW	15
ROZDZIAŁ 1. ZBIORY	15
1.1. Oznaczenia i określenia	15
1.2. Działania na zbiorach	17
1.3. Klasa zbiorów. Iloczyn kartezjański zbiorów	20
1.4. Pytania	22
1.5. Zadania	22
1.6. Odpowiedzi	23
ROZDZIAŁ 2. RELACJE	25
2.1. Określenia i przykłady relacji	25
2.2. Relacje równoważności	30
2.3. Relacje porządkujące	32
2.4. Pytania	36
2.5. Zadania	36
2.6. Odpowiedzi	36
ROZDZIAŁ 3. ODWZOROWANIA	41
3.1. Określenie i przykłady odwzorowań	41
3.2. Obraz i przeciwobraz	47
3.3. Superpozycja odwzorowań. Odwzorowanie odwrotne	50
3.4. Indeksowana rodzina zbiorów. Działania uogólnione	56
3.5. Moc zbiorów	58
3.6. Pytania	61
3.7. Zadania	62
3.8. Odpowiedzi	62
CZĘŚĆ II. ELEMENTY ALGEBRY LINIOWEJ	65
ROZDZIAŁ 1. MACIERZE I WYZNACZNIKI	65
1.1. Wyznaczniki	65
1.2. Algebra macierzy	70
1.3. Rząd macierzy	73
1.4. Układ równań liniowych	74
1.5. Pytania	79
1.6. Zadania	79
1.7. Odpowiedzi	83

ROZDZIAŁ 2. ZASTOSOWANIE RACHUNKU MACIERZOWEGO W EKONOMII	85
2.1. Modele ekonomiczne. Składniki modelu matematycznego	85
2.2. Znaczenie równowagi	87
2.3. Częściowa równowaga rynkowa — model liniowy	88
2.4. Pytania	91
2.5. Zadania	91
2.6. Odpowiedzi	91
2.7. Ogólna równowaga rynkowa.	92
2.8. Równania w analizie dochodu narodowego	93
2.9. Pytania	95
2.10. Zadania	95
2.11. Odpowiedzi	95
2.12. Zastosowanie rachunku macierzowego do modeli rynku i dochodu narodowego	96
2.13. Modele nakładów i wyników Leontiewa	98
2.14. Pytania	105
2.15. Zadania	105
2.16. Odpowiedzi	106
ROZDZIAŁ 3. PODSTAWOWE POJĘCIA PRZESTRZENI WEKTOROWEJ ..	108
3.1. Określenie i własności przestrzeni wektorowej	108
3.2. Podprzestrzenie wektorowe. Suma i iloczyn podprzestrzeni	110
3.3. Liniowa zależność i niezależność układu wektorów	112
3.4. Baza i wymiar przestrzeni wektorowej	116
3.5. Macierz przejścia. Zmiana współrzędnych wektora przy zmianie bazy	121
3.6. Przestrzeń euklidesowa	124
3.7. Układy ortogonalne	126
3.8. Wektory w przestrzeni dwuwymiarowej i trójwymiarowej	129
3.9. Pytania	131
3.10. Zadania	132
3.11. Odpowiedzi	134
CZEŚĆ III. CIĄGI I SZEREGI LICZBOWE	137
ROZDZIAŁ 1. CIĄGI LICZBOWE	137
1.1. Ciąg liczbowy i jego granica	137
1.2. Działania na ciągach i ich granicach. Symbole nieoznaczone	145
1.3. Warunki zbieżności ciągu	147
1.4. Liczba $e = 2,718281$	150
1.5. Pytania	151

1.6. Zadania	151
1.7. Odpowiedzi	153
1.8. Ekonomiczna interpretacja liczby e	154
1.9. Pytania	159
1.10. Zadania	159
1.11. Odpowiedzi	160
ROZDZIAŁ 2. SZEREGI LICZBOWE	161
2.1. Szereg liczbowy i jego suma	161
2.2. Kryteria zbieżności szeregu	162
2.3. Pytania	166
2.4. Zadania	167
2.5. Odpowiedzi	168
CZĘŚĆ IV. RACHUNEK RÓŻNICZKOWY FUNKCJI JEDNEJ ZMIENNEJ I FUNKCJI DWÓCH ZMIENNYCH	171
ROZDZIAŁ 1. POJĘCIE FUNKCJI JEDNEJ ZMIENNEJ	171
1.1. Funkcja, dziedzina, przeciwdziedzina	171
1.2. Funkcje różnowartościowe i odwrotne	173
1.3. Własności funkcji	178
1.4. Granica funkcji	180
1.5. Warunki istnienia granicy. Rachunek granic niewłaściwych	188
1.6. Ciągłość funkcji	190
1.7. Własności funkcji ciągłych	193
1.8. Pytania	196
1.9. Zadania	197
1.10. Odpowiedzi	198
ROZDZIAŁ 2. POCHODNE FUNKCJI JEDNEJ ZMIENNEJ	200
2.1. Pochodna funkcji	200
2.2. Różniczka	206
2.3. Twierdzenia Rolle'a, Lagrange'a i Taylora	207
2.4. Twierdzenie de l'Hospitala	210
2.5. Ekstrema funkcji	212
2.6. Wklęsłość i wypukłość. Punkt przegięcia. Tempo zmian wartości funkcji ..	216
2.7. Asymptoty	219
2.8. Badanie funkcji	220
2.9. Pytania	228
2.10. Zadania	229
2.11. Odpowiedzi	231

ROZDZIAŁ 3. EKONOMICZNA INTERPRETACJA POCHODNEJ FUNKCJI JEDNEJ ZMIENNEJ	235
3.1. Tempo wzrostu funkcji i jego interpretacja ekonomiczna	235
3.2. Interpretacja ekonomiczna pochodnej	236
3.3. Ekonomiczny sens elastyczności	246
3.4. Pytania	253
3.5. Zadania	254
3.6. Odpowiedzi	255
3.7. Badanie funkcji ekonomicznych	258
3.8. Krzywa (funkcja) logistyczna	264
3.9. Pytania	269
3.10. Zadania	269
3.11. Odpowiedzi	270
ROZDZIAŁ 4. FUNKCJE DWÓCH ZMIENNYCH	273
4.1. Określenie funkcji dwóch zmiennych i wielu zmiennych	273
4.2. Granica funkcji dwóch zmiennych	276
4.3. Ciągłość funkcji dwóch zmiennych	280
4.4. Pochodne cząstkowe funkcji dwóch zmiennych	281
4.5. Różniczkowalność funkcji. Różniczka zupełna	285
4.6. Ekstremum funkcji dwóch zmiennych	286
4.7. Formy liniowe i kwadratowe dwóch zmiennych	286
4.8. Pytania	292
4.9. Zadania	293
4.10. Odpowiedzi	294
4.11. Zastosowanie funkcji dwóch zmiennych w ekonomii	295
4.12. Pytania	300
4.13. Zadania	300
4.14. Odpowiedzi	301
4.15. Optymalizacja przy warunkach w postaci równań	301
4.16. Ekstremum warunkowe funkcji dwóch zmiennych	303
4.17. Pytania	314
4.18. Zadania	314
4.19. Odpowiedzi	315
ROZDZIAŁ 5. FUNKCJE TRZECH I WIELU ZMIENNYCH	318
5.1. Funkcje trzech zmiennych	318
5.2. Formy liniowe i kwadratowe trzech zmiennych	319
5.3. Pochodne cząstkowe i różniczki funkcji trzech zmiennych	320
5.4. Ekstremum funkcji trzech zmiennych	325
5.5. Ekstremum warunkowe funkcji trzech zmiennych (warunki wystarczające)	329

5.6. Pytania	332
5.7. Zadania	333
5.8. Odpowiedzi	334
5.9. Funkcje n zmiennych	336
5.10. Ekstremum funkcji n zmiennych	342
5.11. Ekstremum warunkowe funkcji n zmiennych	343
5.12. Pytania	346
5.13. Zadania	346
5.14. Odpowiedzi	347
5.15. Funkcje jednorodne	349
5.16. Pytania	354
5.17. Zadania	355
5.18. Odpowiedzi	355
CZĘŚĆ V. RACHUNEK CAŁKOWY	357
ROZDZIAŁ 1. RACHUNEK CAŁKOWY FUNKCJI JEDNEJ	
ZMIENNEJ	357
1.1. Funkcja pierwotna i całka nieoznaczona	357
1.2. Całkowanie przez części i podstawianie	359
1.3. Całkowanie funkcji wymiernych	361
1.4. Całka oznaczona	364
1.5. Całki niewłaściwe	368
1.6. Zastosowania geometryczne i fizyczne całek	372
1.7. Pytania	377
1.8. Zadania	377
1.9. Odpowiedzi	377
ROZDZIAŁ 2. EKONOMICZNE ZASTOSOWANIA RACHUNKU	
CAŁKOWEGO FUNKCJI JEDNEJ ZMIENNEJ	379
2.1. Ekonomiczne zastosowania całek nieoznaczonych	379
2.2. Ekonomiczne zastosowania całek oznaczonych i niewłaściwych	381
2.3. Pytania	392
2.4. Zadania	392
2.5. Odpowiedzi	393
CZĘŚĆ VI. RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE ZWYCZAJNE	397
ROZDZIAŁ 1. RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE PIERWSZEGO RZĘDU	397
1.1. Przykłady zagadnień ekonomicznych prowadzących do równań różniczkowych pierwszego rzędu	397
1.2. Ogólna teoria równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu	403
1.3. Równania różniczkowe liniowe pierwszego rzędu	406

1.4. Równania Bernoulli'ego	410
1.5. Równanie różniczkowe zupełne	412
1.6. Pytania	415
1.7. Zadania	415
1.8. Odpowiedzi	417
ROZDZIAŁ 2. RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE DRUGIEGO RZĘDU	419
2.1. Ekonomiczne zagadnienia prowadzące do równań różniczkowych drugiego rzędu	419
2.2. Równania różniczkowe liniowe drugiego rzędu sprowadzalne do równań różniczkowych pierwszego rzędu	423
2.3. Równania różniczkowe liniowe drugiego rzędu	423
2.4. Równania różniczkowe liniowe drugiego rzędu o stałych współczynnikach	428
2.5. Pytania	438
2.6. Zadania	438
2.7. Odpowiedzi	439
CZĘŚĆ VII. RÓWNANIA RÓŻNICOWE PIERWSZEGO RZĘDU	
I ELEMENTY MATEMATYKI FINANSOWEJ	441
ROZDZIAŁ 1. RÓWNANIA RÓŻNICOWE PIERWSZEGO RZĘDU	441
1.1. Wprowadzenie	441
1.2. Równania różnicowe pierwszego rzędu	442
1.3. Pytania	446
1.4. Zadania	446
1.5. Odpowiedzi	446
1.6. Modele ekonomiczne rynku dla jednego dobra	446
1.7. Pytania	449
1.8. Zadania	450
1.9. Odpowiedzi	450
ROZDZIAŁ 2. ELEMENTY MATEMATYKI FINANSOWEJ	451
2.1. Procenty i ich zastosowania	451
2.2. Pytania	452
2.3. Zadania	452
2.4. Odpowiedzi	453
2.5. Uwagi wstępne o oprocentowaniu i dyskontowaniu	453
2.6. Rachunek odsetkowy	453
2.7. Oprocentowanie składane — przyszła wartość pieniądza. Oprocentowanie ciągle	457
2.8. Obecna wartość pieniądza	461
2.9. Pytania	463

2.10. Zadania	464
2.11. Odpowiedzi	464
DODATEK. GEOMETRIA ANALITYCZNA	465
1. Układ współrzędnych	465
2. Wektory w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej	469
3. Płaszczyzna w przestrzeni	474
3.1. Pytania	483
3.2. Zadania	483
3.3. Odpowiedzi	484
4. Prosta na płaszczyźnie	484
4.1. Pytania	486
4.2. Zadania	486
4.3. Odpowiedzi	487
5. Linia prosta w przestrzeni trójwymiarowej	487
5.1. Pytania	495
5.2. Zadania	495
5.3. Odpowiedzi	497
LITERATURA	499
SKOROWIDZ	500
MATEMATYKA DLA EKONOMISTÓW. STRESZCZENIE	503
MATHEMATICS FOR ECONOMISTS. SUMMARY	504

Przedmowa

Niniejszy podręcznik jest przeznaczony dla studentów **Wyższej Szkoły Handlu i Prawa w Warszawie** i dostosowany do **wykładów i ćwiczeń z przedmiotu matematyka** oraz **zastosowań matematyki w ekonomii**, prowadzonych na **studiach licencjackich i magisterskich**. Mogą również z niego z powodzeniem korzystać studenci **kierunków ekonomicznych uniwersytetów, Szkoły Głównej Handlowej, kierunków ekonomicznych innych wyższych uczelni** oraz osoby interesujące się zastosowaniami matematyki w ekonomii. Podręcznik składa się z siedmiu części.

W części pierwszej podano zwięzłe podstawowe pojęcia teorii zbiorów, relacje oraz odwzorowania niezbędne do zrozumienia pozostałej części materiału.

Druga część jest poświęcona algebrze liniowej. Przedstawiono w niej teorię macierzy, wyznaczników, układów równań liniowych oraz ich **zastosowanie w ekonomii do badania równowagi rynku oraz analizy dochodu narodowego**. Zaprezentowano również podstawowe pojęcia przestrzeni wektorowej oraz niezbędne informacje o wektorach w przestrzeni dwuwymiarowej i trójwymiarowej.

Część trzecia zawiera teorię ciągów i szeregów liczbowych wraz z **ekonomiczną interpretacją liczby e** .

W części czwartej zaprezentowano podstawy teoretyczne rachunku różniczkowego funkcji jednej zmiennej. Jeden rozdział tej części poświęcono **zastosowaniu rachunku różniczkowego w ekonomii**; zawiera on dużo przykładów z zakresu **zarządzania, handlu i marketingu**. W części tej zawarto również wykład z zakresu funkcji dwóch, trzech i wielu zmiennych wraz z ich **zastosowaniami w ekonomii**.

W części piątej omówiono rachunek całkowity funkcji jednej zmiennej oraz **ekonomiczne zastosowanie rachunku całkowego**.

Część szósta jest poświęcona równaniom różniczkowym zwyczajnym pierwszego i drugiego rzędu oraz ich **zastosowaniom w zagadnieniach ekonomicznych**.

Część siódma dotyczy **równań różnicowych pierwszego rzędu** oraz **elementów matematyki finansowej**.

Wykład jest zwięzły i ścisły, symbolika i abstrakcja wprowadzane stopniowo, a związek pojęć matematycznych z zastosowaniami ilustrują liczne przykłady o narastającym stopniu trudności. Koncepcja metodyczna podręcznika — **łączenie zagadnień teoretycznych z rozwijaniem sprawności w rozwiązywaniu zadań i problemów doskonale sprawdza się w praktyce**. Kierując się tą zasadą w każdym rozdziale zawarto zwięzłe informacje teo-

retyczne (definicje, twierdzenia, dowody twierdzeń, wzory), a także szczegółowe rozwiązania licznych przykładów, zadania ilustrujące wprowadzane pojęcia i zastosowania poznanych twierdzeń oraz liczne przykłady z zakresu **zastosowań matematyki w ekonomii**.

Każdy rozdział zawiera na końcu pytania kontrolne oraz zadania do samodzielnego rozwiązania. W podręczniku znajdują się również odpowiedzi do wszystkich zadań. Definicje, twierdzenia, wnioski, uwagi oraz przykłady i wzory są oznaczone podwójnymi numerami, z których pierwszy oznacza numer rozdziału, a drugi jest kolejnym numerem definicji, twierdzenia bądź uwagi, przykładu względnie wzoru w danym rozdziale.

W *Dodatku* umieszczono podstawowe pojęcia geometrii analitycznej wraz z zagadnieniami dotyczącymi prostej na płaszczyźnie, prostej w przestrzeni oraz płaszczyzny w przestrzeni. Wyprowadzone pojęcia zilustrowano rysunkami, przykładowymi zadaniami oraz zadaniami do rozwiązania.

Składam serdeczne podziękowania dr. J. Plochowi, mgr. K. Banachowi, dr. P. Kacprzykowi, mgr. W. Nalepie, mgr. W. Matuszewskiemu, mgr R. Perkowskiej, mgr R. Pruszyńskiej za wiele cennych uwag dotyczących treści zawartych w podręczniku.

Warszawa, Boernerowo, styczeń 2010 r.

Jerzy Gawinecki